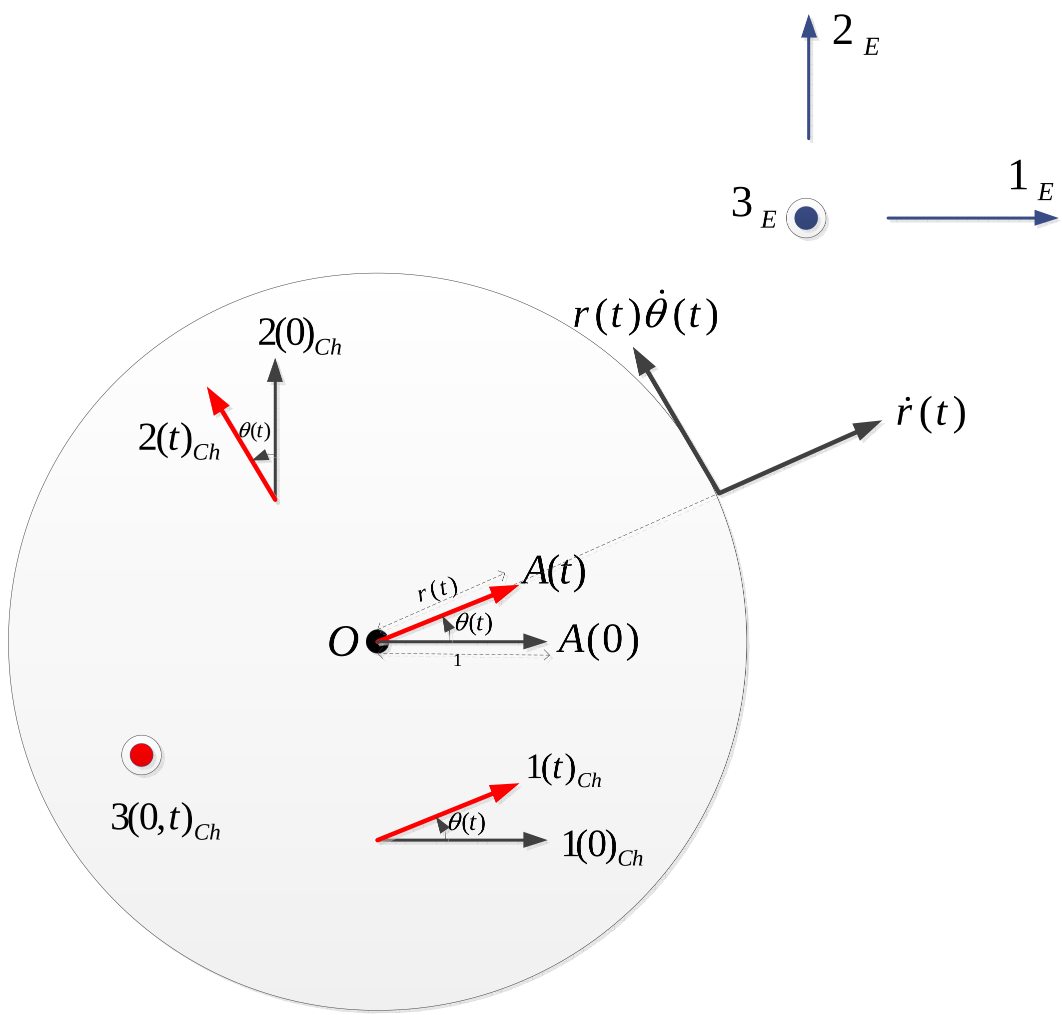
## جلسه نهم

مباحث این جلسه را با طرح یک مسأله آغاز می‌نماییم.




فرض کنید در شکل فوق $1_E$، $2_E$ و $3_E$ محورهای دستگاه چسبیده به زمین باشند. دایره‌ای که در شکل فوق مشاهده می‌کنید، نگاهی از بالا به یک چرخ و فلک در حال حرکت است. محورهای دستگاه چسبیده به این چرخ در لحظه‌ی اول $1(0)_{Ch}$، $2(0)_{Ch}$ و $3(0)_{Ch}$ می‌باشند و در لحظه‌ی t، $1(t)_{Ch}$، $2(t)_{Ch}$ و $3(t)_{Ch}$ می‌باشند. همانطور که در شکل مشاهده می‌کنید همواره محور سوم زمین و چرخ نسبت به زمان تغییر نکرده و هم‌راستا

هستند. فرض کنید کودکی در لحظه‌ی ابتدایی در $A(0)$ به فاصله واحد از نقطه‌ی O قرار داشته باشد و در لحظه‌ی t در $A(t)$ به فاصله‌ی $r(t)$ از O قرار داشته باشد.

- **حال $^{Ch}\underline{r}_{OA}(t)$ و $^{E}_{Ch}C(t)$ را بر حسب $r(t)$ و $\theta(t)$ بدست آورید.**

$$^{Ch}\underline{r}_{OA}(t)=\begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^{E}_{Ch}C(t)=\begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

با توجه به شکل کاملاً مشخص است که $^{Ch}\underline{r}_{OA}(t)$ تنها در راستای اول دستگاه چرخ مقدار دارد. این مقدار همان $\underline{r}(t)$ است. به بیان دیگر ناظرروی چرخهمواره تنها در راستای محور اول برای کودک مولفه می‌بیند.

- **با استفاده از نتیجه‌ی بخش قبل $^{E}\underline{r}_{OA}(t)$ را بر حسب $r(t)$ و $\theta(t)$ بدست آورید.**

$$^{E}\underline{r}_{OA}(t)={}^{E}_{Ch}C(t)\,{}^{Ch}\underline{r}_{OA}(t)=\begin{pmatrix} r(t)\cos(\theta(t)) \\ r(t)\sin(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓ همانطور که تا این‌جا مشاهده نمودید بیان یک بردار ممکن است در یک دستگاه بسیار ساده ولی در دستگاه دیگر بسیار پیچیده باشد.

- **زین پس D را به معنی سرعت نسبت به زمان تعریف می‌کنیم. حال بردارهای $D^{Ch}\underline{r}_{OA}(t)$ و $D^{E}\underline{r}_{OA}(t)$ را بدست آورید.**

$$D^{Ch}\,\underline{r}_{OA}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{dr(t)}{dt}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{r}(t)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$D^{E}\,\underline{r}_{OA}(t)=\begin{pmatrix}\dot{r}(t)\cos(\theta(t))-r(t)\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t))\\ \dot{r}(t)\sin(\theta(t))+r(t)\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t))\\ 0\end{pmatrix}$$

در این‌جا می‌توان به چند نکته‌ی مهم اشاره کرد:

- ✓ سرعت بردارها از دید دستگاه‌ها را به راحتی، ابتدا با بیان نمودن بردارها در آن دستگاه و سپس مشتق‌گیری نسبت به زمان می‌توانیم بدست آوریم.
- ✓ اگر دستگاه‌ها از دید یکدیگر نسبت به زمان در حال دوران باشند، سرعت‌هایی که از یک بردار می‌بینند می‌تواند فرق داشته باشد.

- **حال بردار سرعت دورانی بین دو دستگاه یا ${}^{E}\underline{\omega}_{E\,Ch}$ ، ${}^{E}\underline{\omega}_{Ch\,E}$ ، ${}^{Ch}\underline{\omega}_{E\,Ch}$ و ${}^{Ch}\underline{\omega}_{Ch\,E}$ را بدست آورید.**

$${}^{E,Ch}\underline{\omega}_{E\,Ch}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\theta}(t)\end{pmatrix}$$

به دلیل اینکه محور دوران بین دو دستگاه همان محور مشترک بین آن‌ها یعنی راستای سوم آن‌هاست در این مثال بردار سرعت دورانی در هر دو دستگاه یک بیان پیدا می‌کند. همچنین ${}^{E,Ch}\underline{\omega}_{Ch\,E}=-{}^{E,Ch}\underline{\omega}_{E\,Ch}$ است.

- ✓ سه‌تایی $D^{E}\underline{r}_{OA}(t)$ در حقیقت بیانِ سرعتِ بردارِ $\underline{r}_{OA}(t)$ از دید زمین (در همان دستگاه زمین ) می‌باشد که البته از این پس خودِ بردار(و نه بیانش در یک دستگاه) را به صورت $D_{E}\underline{r}_{OA}(t)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که این سرعت( $D_{E}\underline{r}_{OA}(t)$) هنوز برداری بوده و آن را در هیچ دستگاهی بیان نکردیم. با بیان نمودن آن در هر دستگاهی به آن ماهیتی عددی می‌دهیم. به عبارت دیگر سرعت از دید دستگاه ماهیتی برداری دارد که عددی شدن آن بستگی به دستگاهی دارد که در آن بیان می‌شود.

- ✓ $D^E \underline{r}_{OA}(t)$ به این معنی است که زمین سه عدد را می‌دیده و سپس از آن مشتق گرفت و $^E(D_E \underline{r}_{OA}(t))$ به این معنی است که زمین تغییراتِ برداری را می‌دیده و بعد آنچه دیده را در دستگاه خودش بیان کرده است . به این ترتیب روابط زیر برقرار است.

$$^E(D_E \underline{r}_{OA}(t)) = D^E \underline{r}_{OA}(t)$$
$$^{Ch}(D_E \underline{r}_{OA}(t)) \neq D^E \underline{r}_{OA}(t)$$

- **با استفاده از توضیحات داده شده، سرعت از دید دستگاه زمین و بیان شده در دستگاه چرخ یا $^{Ch}(D_E \underline{r}_{OA}(t))$ را بدست آورید.**

$$^{Ch}(D_E \underline{r}_{OA}(t)) = {}^{Ch}_{E}C\, {}^E(D_E \underline{r}_{OA}(t)) = {}^{E}_{Ch}C^T \; D^E \underline{r}_{OA}(t)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t)) \\ \dot{r}(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ r(t)\dot{\theta}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ✓ از همین رو مولفه‌ی $\dot{r}(t)$ سرعت مماسی و به مولفه‌ی $r(t)\dot{\theta}(t)$ سرعت شعاعی می‌گوییم. در حقیقت سرعت، جمع برداری این دو سرعت است(این مولفه‌ها در شکل ابتدای جلسه نشان داده شده‌اند). ملاحظه کنید که بیان سرعت از دید زمین، در دستگاه چرخ چقدر ساده‌تر از بیان همان، در دستگاه زمین است.

- ✓ موضوعات این جلسه و جلسه‌ی قبل از اساسی‌ترین مسائل سینماتیک هستند که در مراجع موجود تأکید و تشریحی بر آن‌ها نشده است.

- ✓ به عنوان یک نمونهٔ بسیار کاربردی و روزمره ، دقت کنید که از دید ما که روی زمین هستیم خورشید در حال دوران است و از دید خورشید، ما در حال دوران هستیم لذا سرعتی که ما روی زمین از جابجایی‌ها می‌بینیم با سرعتی که خورشید از همین جابجایی‌ها می‌بیند فرق دارد و البته به همین ترتیب شتابی که ما روی زمین می‌بینیم با شتابی که خورشید می‌بیند فرق دارد.

- ✓ دقت کنید که ما ادبیات دقیقی برای دوران یک بردار نسبت به یک دستگاه ایجاد نکرده‌ایم که بتوانیم بر اساس آن دوران بردار خورشید زمین را نسبت به دستگاه زمین بیان کنیم. لذا بیانی که در بند بالا شد

خالی از اشکال نیست. اما از طرفی چون ادبیات دقیقی را برای دوران بین دو دستگاه ایجاد کرده و در دست داریم، ما در آزمایش سایه‌ها سعی کردیم دستگاهی را به نام خورشید-زمین معرفی کنیم که دوران خورشید نسبت به زمین و یا برعکس، بتواند دقیق به صورت دوران بین دو دستگاه بیان شود.